3er PREMIO

LOS CELULARES COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL MEDIO

Patricia Inés Aurucis

Es Profesora en Matemática y Astronomía, Especialista en Computación y Licenciada en Enseñanza de las Ciencias (Orientación en Didáctica de la Matemática). Ejerce como Profesora de Matemática en el Colegio Nacional de Buenos Aires y Profesora Adjunta Interina de Probabilidad y Estadística y Jefa de Trabajos Prácticos de Análisis Matemático II de la Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Buenos Aires. Asimismo, es Investigadora de la Universidad Tecnológica Nacional.

Silvina Cafferata Ferri

Es Profesora en Matemática y Astronomía, Especialista en Computación y Licenciada en Enseñanza de las Ciencias (Orientación en Didáctica de la Matemática). Desarrolla su actividad como docente de Análisis Matemático en el Instituto de Enseñanza Superior N° 1 "Alicia Moreau de Justo" y en el Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico. También es Profesora e investigadora de la Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Buenos Aires.

Gerardo Rubén Mamani

Es Profesor en Matemática y Astronomía, Profesor en Ciencias Económicas, Especialista en Computación y posee una Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (adeuda Tesis). Se desempeña como Profesor de Matemática y Nuevas Tecnologías en el Instituto Fray Mamerto Esquiú de San Francisco Solano y Profesor de Matemática del Instituto San Jorge e Instituto Santo Tomás de Florencio Varela.

Silvia Mariel Trisalén

Es Profesora en Matemática. Se desempeña dictando dicha materia en el Instituto Fray Mamerto Esquiú de San Francisco Solano. También es Profesora de Espacio de la Práctica I del Instituto Superior Manuel Belgrano de Berazategui y Directora de la Sección Educación Secundaria del Instituto Malvinas Argentinas de San Francisco Solano.

ÍNDICE

1. RESUMEN

Si bien se fue aceptando la posibilidad de que los alumnos lleven sus celulares a la escuela, sigue siendo objeto de prohibición su uso en las aulas. Algunas experiencias llevadas a cabo en nuestro país y en otros lo incluyen en la enseñanza, sin aprovechar sus potencialidades, limitando su uso a las funciones más comunes.

¿Es posible encontrar en los celulares una herramienta que permita contar con ellos como otro recurso didáctico en el aula? ¿Qué tipo de actividades y situaciones permiten incorporarlo como una herramienta que contribuya al proceso de enseñanza y aprendizaje?

Presentamos una propuesta que permita contar con una experiencia en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, de la que no se cuenta con ensayos previos.

Desarrollamos programas ejecutables en los celulares, diseñados con algún objetivo particular, pudiendo cada docente elaborar las actividades con que desee implementarlos, adecuándose al contenido que se desarrollará y a los alumnos destinatarios.

En este trabajo se exponen las conclusiones a las que se han arribado a partir de la implementación de una serie de actividades referidas al contenido “divisibilidad de números naturales”, desarrolladas en el Instituto Fray Mamerto Esquiú, de San Francisco Solano, Provincia de Buenos Aires.

2. INTRODUCCIÓN

Resulta muy usual en la actualidad que se siga cuestionando la posibilidad de que los alumnos puedan llevar a la escuela teléfonos celulares e incluso que algunas normativas –ya sean propias de cada institución o más generales, dictadas por cada uno de los organismos de quienes dependen de acuerdo a cada región– apoyen esta reticencia.

Cierta aceptación por parte de algunas instituciones se fue dando de manera paulatina, ante las ventajas que poco a poco se van reconociendo y asumiendo. Puede destacarse la seguridad como uno de los aspectos más relevantes por los cuales el celular se fue aceptando, ya que –según esgrimen los padres– es de gran utilidad que un alumno pueda contar con un medio de comunicación ante una emergencia, de modo que sea posible contactarse con su familia ante alguna situación que surgiera y que a su vez un familiar se pueda comunicar con él ante alguna necesidad.

Si bien se fue aceptando la posibilidad de que los alumnos lleven sus celulares a la escuela, sigue siendo objeto de prohibición su uso en las aulas, ya que no se permite hablar con ellos o escribir mensajes durante las clases ni utilizar sus funciones multimedia en esos momentos.

¿Pero es posible encontrar en los celulares una función o herramienta que permita contar con ellos como otro recurso didáctico en el aula?

Pueden servir de referencia otras experiencias que ya se han realizado, la mayoría de ellas en otros países, que incluyen por ejemplo:

- la utilización de juegos y materiales de aprendizaje para mejorar el nivel de lectura y de ortografía en jóvenes de Suecia, Gran Bretaña e Italia;

- la realización de películas educativas utilizando teléfonos celulares en complemento con los programas de edición de video y audio disponibles en las computadoras con el objeto de reforzar las habilidades del lenguaje audiovisual, a través de cursos de capacitación a docentes en Chile para que lo puedan implementar en las aulas; en ese mismo país existe también una experiencia a través de la cual se entregaron aplicaciones, para descargar en celulares, a los alumnos del último año de los colegios estatales para prepararse al ingreso a la universidad, contando también con un sistema de información que les notifica acerca de fechas importantes y resultados de las evaluaciones de ingreso;

- la utilización de los celulares como instrumento para filmar cómo resuelven determinadas actividades alumnos de escuelas secundarias en Estados Unidos con el objeto de compartir luego los videos en una red social;

- el desarrollo en Chile de videojuegos de rol para celulares, aplicados en el aprendizaje de ciencias y de habilidades de pensamiento científico y de resolución de problemas en alumnos de educación básica;

- la aplicación de la tecnología de aprendizaje móvil para apoyar la enseñanza del inglés como segunda lengua en estudiantes de zonas rurales de India pero no como una actividad escolar sino llevada a cabo por un estudiante estadounidense como proyecto de tesis.

Parte de estas experiencias nos ha motivado a cuestionarnos acerca de la posibilidad de incluir los celulares como otro recurso didáctico en la educación. Si bien lo resumido seguramente no da cuenta de la totalidad de las experiencias implementadas en cada uno de los distintos países, los ensayos a los que se puede tener acceso nos dejan un vacío respecto de la matemática, que es la asignatura que nos resulta de interés. De las fuentes consultadas solo surge respecto de esta disciplina el trabajo de un egresado de la Universidad de Santiago de Chile, quien realizó una experiencia en un colegio de su país brindándole a los alumnos clases explicadas que pueden cargarse en los celulares, actividades interactivas y un test autoevaluativo que devuelve una calificación tras ser realizado (Alcaino, 2009).

También encontramos un vacío respecto de la verdadera utilización del teléfono celular como recurso; es decir, no solo plantear una actividad del mismo modo en que se hace habitualmente e incorporando el celular a ésta, como por ejemplo filmar el modo en que se resuelven las actividades pero siendo éstas las que se realizan de manera habitual, sino plantearnos qué tipo de actividades y situaciones permiten incorporar al celular como una herramienta de mediación cognitiva que contribuye al proceso de enseñanza y aprendizaje de algún contenido matemático del currículo actual o bien permite acceder a contenidos no accesibles de otro modo.

Con respecto a nuestro país, no se cuenta con experiencias didácticas que incluyan al celular como una herramienta, aunque comienzan a encontrarse publicaciones con los primeros ensayos sobre su uso y flexibilización de las normativas vigentes (Anexo 1).

3. LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL

"La especie humana elabora herramientas con propósitos deliberados. Mediante la producción de herramientas hemos alterado nuestra estructura cognitiva y adquirido, por así decirlo, nuevos órganos para la adaptación al mundo exterior.

[...] En la actualidad, las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educativos, han reconocido la pertinencia del principio de mediación instrumental que podemos expresar de la siguiente manera: todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico.

En este principio (Wertsch, 1993) convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitabilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional" (Moreno Armella y Waldegg, 2002).

Los instrumentos que se emplean en el proceso de aprendizaje inciden directamente en el conocimiento que se adquiere. Específicamente, los instrumentos computacionales proveen al estudiante un campo de experimentación que antes no estaba a su alcance.

Estos mediadores computacionales pueden ser interpretados desde dos sentidos: como instrumentos amplificadores o bien como reorganizadores cognitivos. Ambos aspectos no resultan independientes, sino que forman parte de un mismo proceso.

"La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de re-organización sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto. Se abre entonces la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo. La reorganización no puede separarse de la amplificación. Son las dos caras de una moneda" (Moreno Armella, 2002).

4. LA ELECCIÓN DE LOS TELÉFONOS CELULARES COMO RECURSO DIDÁCTICO

"La escuela [...] debe permanecer atenta a los desarrollos tecnológicos y darse a la tarea de realizar una revisión de los métodos tradicionales de enseñanza para ver qué tanto se está promoviendo el desarrollo del pensamiento; [...] es tarea imperativa de la escuela organizar el currículo de manera que incorpore los recursos que brindan las nuevas tecnologías en la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos" (Viñas de la Hoz y otros, 2004).

Son innumerables las ventajas que pueden mencionarse acerca de la utilización de diferentes recursos y herramientas didácticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Respecto de los avances tecnológicos, las computadoras pueden indicarse como uno de los recursos más analizados en los últimos años respecto de su introducción en las aulas, ya sea utilizando paquetes informáticos comerciales o diseñando actividades propias por parte de cada docente.

Si bien puede mencionarse, también en este caso, un gran número de virtudes en la utilización de recursos informáticos por sobre los medios tradicionales, debemos tener en cuenta que no siempre las escuelas cuentan con un número considerable de computadoras en relación con la cantidad de alumnos por curso, resultando poco habitual el uso de una computadora de manera personal o individual por cada alumno; no es habitual tampoco que se cuente con ellas en las mismas aulas donde los alumnos desarrollan las clases, por lo que su utilización acarrea un traslado de cada curso a las aulas especialmente diseñadas para informática, lo que no termina siendo el ámbito usual de los docentes de las otras áreas; este traslado de los alumnos a la sala donde se encuentran las computadoras trae también como inconveniente adicional la posible superposición con otros docentes, ya que justamente en dicha aula pueden encontrarse los profesores del área de informática o cualquiera de los otros docentes que también hayan querido implementar la utilización de las computadoras en sus clases.

Pensar entonces en otro recurso como el teléfono celular para el proceso de enseñanza y aprendizaje de algunos de los contenidos matemáticos nos evita los inconvenientes mencionados.

Como el problema del traslado y la disponibilidad de las computadoras ha sido ya analizado por distintos autores o frente a posibles experiencias didácticas, se presenta en ocasiones como respuesta a esto la posibilidad de que los alumnos cuenten con calculadoras simbólicas-graficadoras o computadoras personales en el aula. Pero esta posible solución presenta a su vez otro inconveniente: al menos en nuestro país, no es habitual el uso de dichas calculadoras, y el costo de las computadoras personales no resulta viable como respuesta a que cada alumno cuente en el aula con el recurso necesario, excepto en aquellas regiones donde los organismos han provisto a los jóvenes de estos elementos.

El teléfono celular, sin embargo, no acarrea grandes costos en proporción a otros recursos tecnológicos, y en la mayoría de los casos no implica siquiera la imposición de su compra porque los alumnos ya cuentan con ellos.

Por otra parte, respecto de la inclusión de nuevas tecnologías en el aula se presenta también el hecho de seleccionar o diseñar el tipo de actividades que se pueden desarrollar con cada una de las herramientas, ya sea en su sentido amplificador o reorganizador cognitivo.

De nosotros depende que las nuevas tecnologías puedan ser utilizadas de otro modo y que se puedan traducir en fines educativos, investigativos o comerciales. "Necesitamos nuevos enfoques pedagógicos para enseñar viejos conocimientos en una forma nueva y accesible, pero también es necesario considerar cómo las nuevas tecnologías nos pueden ayudar también a construir un nuevo currículo" (Noss, 1999; 51).

El conocimiento requiere de cierto grado de razonamiento y enjuiciamiento que organiza la información mediante su comparación y clasificación, como así también "un ambiente de creatividad y libertad" (Tedesco, 1999). Nuestros alumnos cuentan hoy con mucha información, gracias a la gran cantidad de enciclopedias multimedia que se encuentran en el mercado y al alcance masivo que han tenido en los últimos años redes como Internet por ejemplo, que permite acceder a bibliotecas electrónicas, conferencias interactivas y a miles de páginas web a través de buscadores.

En consecuencia, debemos adaptarnos a estos avances y pensar tipos de actividades que hagan uso de toda esta información pero que permitan llegar al conocimiento. Están cambiando los métodos tradicionales de aprendizaje, por lo que debemos replantear los métodos de enseñanza. Ese ambiente de creatividad y de libertad al que hace referencia Tedesco se puede lograr, por ejemplo, a través de actividades donde el docente sea el guía o el conductor en el proceso de enseñanza del alumno, y no el tradicional profesor expositor donde el alumno solo escucha y copia lo que le transmiten.

Respecto de las computadoras, pueden seleccionarse paquetes o programas comerciales, ya diseñados con algún objetivo general o especialmente desarrollados para el trabajo de algún contenido matemático, pero no siempre resulta sencillo que cada escuela pueda contar con los medios económicos para poder adquirirlos, o con las licencias que se requieren para su instalación en todas las computadoras con que se cuenten, o con las especificaciones técnicas que muchas veces se requieren para poder instalarse, ya que son en general paquetes muy pesados y con innumerables exigencias de hardware en las computadoras con las que se desea trabajar.

Por su parte, los celulares se han vuelto tan potentes que su función principal, la comunicación, es solo una de las diversas posibilidades que provee, en virtud del procesador que incorporan, aún los de baja gama. Entre ellas, se destaca la de ejecución de “midlets”, pequeños programas escritos en leguaje Java (J2ME).

Poder entonces pensar en el diseño de programas que no presenten grandes requerimientos técnicos nos resultó otra ventaja por sobre los demás recursos y motivó la construcción de diversas herramientas de corte minimalista, que abarcan distintas ramas de la matemática. Los programas diseñados para su utilización en los celulares tienen un tamaño muy pequeño, y respecto de los requerimientos del equipo, pueden cargarse en los teléfonos con los que los alumnos ya cuentan.

Una vez instaladas estas aplicaciones en los teléfonos celulares de los alumnos, su uso es posible no solo en la escuela o en horarios de clases sino también fuera del ámbito escolar, aprovechando espacios y tiempos no escolares y no formales, siendo ésta otra ventaja por sobre otros recursos; a diferencia de la utilización del software habitual, no se requiere en este caso la instalación de programas en las computadoras familiares de los alumnos, y la utilización de los celulares puede realizarse incluso en cualquier ámbito, sin requerir condiciones especiales de espacio o de electricidad, entre otros.

5. LOS DISEÑOS CURRICULARES

Una cuestión a tener en cuenta resulta la pertinencia del presente trabajo en el marco del currículo actual.

A la fecha, en la Ciudad de Buenos Aires se han elaborado programas para primer y segundo años y materiales curriculares con aportes para la enseñanza del nivel medio, mientras que en la Provincia de Buenos Aires se publicaron los diseños curriculares para los tres primeros años de la escuela secundaria y la edición previa, del mes de diciembre de 2009, para el cuarto.

En estos documentos se adhiere al postulado que entiende a la resolución de problemas como preponderante en la enseñanza de la matemática.

En tal sentido, todo problema debe interpretarse como una situación, interna o externa a la matemática, que provoca un desafío al alumno. Ha de poseer un nivel tal que el estudiante pueda abordarlo pero que carezca de las herramientas para dar con su resolución de inmediato.

En el proceso de resolución se produce una serie de intervenciones entre pares y con el docente, quien dosifica su participación, lo que dará lugar a constantes reflexiones, que llevan a la construcción del conocimiento de una manera fundamentada. Se promueve la búsqueda de procedimientos pero también la argumentación, verbal y escrita, respecto de su validez. Finalmente, se produce la formalización del conocimiento construido (Brousseau, 1986, citado en Moreno Armella y Waldegg, 2002).

Por otra parte, con relación a los recursos tecnológicos, los documentos promueven la utilización de distintos tipos de calculadoras, de cuatro operaciones y científicas, como así también de computadoras, provistas de programas graficadores (para el análisis de funciones) o, en el caso de la Provincia de Buenos Aires, de geometría dinámica (para el estudio de las relaciones geométricas).

Lo expresado en este último acápite resulta concordante con la recomendación del Consejo Estadounidense de Profesores de Matemática (NCTM) respecto de la integración de las calculadoras en el programa de matemáticas escolares, al entender que potencia el desarrollo cognitivo, dado que su uso apropiado favorece la experimentación, exploración, apropiación conceptual, visualización y comprensión. Asimismo, es ratificado por el marco teórico del Proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos (PISA/OCDE) de 2003, en lo que se refiere a las competencias de empleo de soportes y herramientas.

En síntesis, en ambas jurisdicciones la resolución de problemas y las nuevas tecnologías resultan elementos que han sido considerados de relevancia para el desarrollo de la actividad pedagógica. Tales aspectos son los pilares en que se apoya este desarrollo.

6. NUESTRA PROPUESTA

Tomando como referencia los artículos citados con experiencias implementadas en otros países, nos pareció interesante poder contar con experiencias propias del nuestro. Y dado que lo hallado no hace referencia a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, presentamos una propuesta que se relaciona con esta ciencia en particular.

En la actualidad existe una gran cantidad de programas para celulares, especialmente juegos; sin embargo, son muy pocos los vinculados con el área que nos ocupa. Pueden hallarse calculadoras y algún paquete matemático, aunque con importante exigencia de recursos.

Es por ello que hemos desarrollado una serie de programas, cada uno diseñado con algún objetivo particular, que realiza o resuelve determinadas cuestiones; por ejemplo, hallar la descomposición en factores primos de un número natural, indicar si un número natural es primo o no, hallar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor entre dos números naturales, escribir la expresión fraccionaria correspondiente a una expresión decimal exacta o periódica, realizar operaciones con números complejos e indicar sus diferentes expresiones, resolver el cálculo de un logaritmo en cualquier base, hallar las raíces de una expresión polinómica, realizar operaciones con expresiones polinómicas, resolver ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales, realizar el análisis completo de una función cuadrática y el gráfico correspondiente, etc.

Estos objetivos puntuales permiten que el programa resulte de un tamaño llamativamente pequeño, posible de instalar en casi todos los teléfonos celulares con que los alumnos cuentan, sin requerimientos de última tecnología ni grandes tamaños de memoria.

Como se ha indicado, cada programa fue diseñado para resolver o realizar una operación en particular, utilizando este recurso tecnológico como una herramienta, pudiendo cada docente diseñar el tipo de actividades con que lo desee implementar, adecuándose al contenido que se desarrollará y a los alumnos a los que estas actividades están destinadas, y definiendo la modalidad que le resulte más adecuada (grupal, individual, por períodos de tiempo, según objetivos, etc).

Esta posibilidad de que cada docente pueda diseñar sus propias actividades podemos relacionarlo con el conocimiento estratégico al que hace mención Pozo (1997). Allí, el autor propone que la información debe utilizarse en actividades abiertas que pueden admitir soluciones diversas en lugar de plantear solo tareas rutinarias; a través de ese tipo de actividades, los alumnos están en condiciones de transferir estratégicamente su conocimiento a nuevos problemas. Con este tipo de actividades se pretende alcanzar algunas de las finalidades que Aguilera Jiménez (2000) indica para la educación, formando a nuestros alumnos con capacidades tales como dominio de la lengua, comprensión de los fundamentos de la ciencia y de las nuevas tecnologías, pensamiento crítico, capacidad de analizar un problema, capacidad de trabajar en equipo, curiosidad y creatividad, entre otras.

Tal como indica San Martín Alonso (1995), el éxito o el fracaso de una actividad no se puede atribuir de manera exclusiva a la utilización de una nueva tecnología sino que éstas operan junto a la presencia de otras variables, están insertas dentro de un desarrollo curricular que apunta a alcanzar un conocimiento a través de distintas actividades y tareas, y utilizan para ello distintos recursos y herramientas.

Cabe mencionar aquí que el propósito de estas herramientas informáticas es ampliar las funciones que provee una calculadora científica, es decir, proporcionar funciones típicas de una calculadora simbólica y graficadora. Estos nuevos recursos brindan grandes posibilidades de exploración y análisis de representaciones, que dan pie a la elaboración de conjeturas por parte del estudiante.

“Queremos enfatizar en el rol que los docentes debemos asumir en cuanto a la elección de actividades para trabajar con la calculadora que permitan promover ganancia en fluidez conceptual y algorítmica en el trabajo matemático. Esta tarea exige una revisión de los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas sin ayuda de calculadoras graficadoras y algebraicas, profundizar en el currículo de matemáticas en general y contemplar la posibilidad de incorporar gradualmente el uso de estos recursos computacionales para contribuir a la creación de una cultura informática en la escuela" (Viñas de la Hoz y otros, 2004).

Para el desarrollo e implementación de una experiencia en particular, seleccionamos el contenido de divisibilidad de los números naturales con el objeto de poder presentar, compartir y analizar un ejemplo de aplicación de lo anteriormente mencionado.

7. LAS ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS

El diseño de los programas como aplicación en los teléfonos celulares permite utilizar a éstos como herramientas para la resolución de determinadas actividades, desarrollando algún contenido matemático a partir de un recurso didáctico que no resulta habitual en la actualidad.

De los contenidos que pueden desarrollarse a partir de las actividades diseñadas para la implementación de estas aplicaciones, elegimos "divisibilidad de números naturales" como ejemplo del cual puede mostrarse lo que se ha puesto en acto.

Este contenido comienza a tratarse incluso desde los últimos años de la escuela primaria; por ejemplo, para resolver adiciones y sustracciones de números racionales expresados en forma fraccionaria o para aquellas situaciones que se podrían llamar "de encuentro" (Luis visita a su abuela cada dos días y su hermano lo hace cada tres días. Si ambos la visitaron el lunes pasado, ¿cuándo vuelven a coincidir en la visita?), y se continúa durante los primeros años de la escuela secundaria. Los conceptos asociados a la divisibilidad se presentan incluso en tantas situaciones de la vida cotidiana que puede resultar de gran interés para que su aprendizaje sea significativo.

Si bien es necesario que los alumnos cuenten con los conceptos de multiplicación, división y reciprocidad entre ellos, muchas veces se reduce el desarrollo del concepto de divisibilidad al ejercicio de estas operaciones. Los alumnos pueden conocer incluso de la escuela primaria las reglas de divisibilidad, pero en muchas ocasiones se presentan dificultades respecto del concepto de cuándo un número es divisible por otro, ya que en su mayoría estos criterios solo se enseñan como una regla pero se desconoce su fundamento y su justificación.

Es decir, el concepto de divisibilidad es mucho más amplio y permite una innumerable cantidad de situaciones a tener en cuenta, donde se pueden presentar los distintos aspectos a tratar tal como podrá observarse en las actividades desarrolladas.

La implementación de las mismas se llevó a cabo en tres cursos correspondientes a la sección Educación Secundaria del Instituto Fray Mamerto Esquiú, de San Francisco Solano, Quilmes, Provincia de Buenos Aires.

Los objetivos de estas actividades son que los alumnos puedan:

- reconocer y hallar divisores y múltiplos de un número natural;
- identificar en situaciones de la vida cotidiana relaciones de divisibilidad;
- reconocer números primos y compuestos;
- descomponer en factores primos un número natural;
- reconocer y hallar números perfectos;
- identificar y obtener números primos gemelos;
- relacionar la cantidad de divisores de un número con su descomposición factorial;
- aplicar los conceptos mencionados en la resolución de situaciones problemáticas;
- interactuar, distribuir tareas, confrontar ideas, realizar acuerdos en el grupo de trabajo y con el resto de la clase;
- elaborar conjeturas, tendiendo a la formalización, respecto de los análisis realizados.

Los contenidos conceptuales que se desarrollan a través de estas actividades son: números naturales; operaciones con números naturales; divisibilidad de los números naturales; múltiplos y divisores de un número natural; números primos y números compuestos; descomposición en factores primos de un número natural; criterios o reglas de divisibilidad; números perfectos y números primos gemelos.

La secuencia de problemas que se seleccionaron acerca del contenido mencionado se encuentra en el Anexo 2.

De esas actividades, se seleccionaron algunas para su implementación, la que se realizó a lo largo de tres encuentros:

- El primero de ellos, con el objeto de profundizar sobre los conceptos de divisibilidad y divisores de un número natural, y rever los criterios de divisibilidad de los números naturales. Para ello, se resolvieron los problemas 1, 2, 3 y 4 del Anexo mencionado.

- El segundo encuentro apuntó a rever el concepto de números primos y compuestos, la descomposición en factores primos de un número natural y la presentación de los números perfectos. En esta instancia se resolvieron los problemas 5, 6, 7 y 8 de la secuencia.

- Y en un tercer encuentro se profundizó sobre la descomposición en factores primos de un número natural, presentando además los números primos gemelos. Se resolvieron los problemas 9, 11, 12, 13, 14 y 15.

La posibilidad de implementar las actividades en cursos que ya cuentan con conocimientos previos referidos al concepto de divisibilidad de números naturales permite poner el énfasis en la variedad de aspectos y situaciones desde las que se puede abordar este contenido, y profundizar en las estrategias de la resolución de problemas, ya que se presentan diversos enunciados donde lo planteado puede estar al alcance de los alumnos pero cuya resolución no es inmediata, y donde pueden presentarse distintos métodos o procedimientos en su resolución.

Desde el punto de vista didáctico, esto se relaciona con el concepto de aprendizaje significativo al que hace referencia Ausubel y el modelo aproximativo de Charnay donde se propone partir de concepciones existentes en el alumno y ponerlas a prueba para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas. Las situaciones problemáticas que se seleccionaron y se propusieron permiten a los alumnos ensayar, buscar reglas, proponer soluciones, confrontarlas con las de sus compañeros, discutirlas y fundamentarlas. Al mismo tiempo, para que los conceptos no se presenten de manera aislada, la secuencia elaborada tiene por objeto que los alumnos construyan una red de conceptos a partir de la diversidad de aspectos desde los cuales se puede desarrollar el contenido de divisibilidad.

Para su implementación, una vez seleccionados los cursos con cuales trabajar, se cargaron los programas en los celulares de los alumnos. Para la resolución de las actividades planteadas, de los programas diseñados previamente, se instalaron:

	DIVISORES Programa que, al ingresar un número natural indica la cantidad de divisores que tiene y los enumera.
	FACTORIZACIÓN Programa que, al ingresar un número natural, indica su descomposición en factores primos.
	PRIMOS Programa que, al ingresar un número natural, indica si es primo o no.

En el Anexo 3 se adjuntan imágenes de los programas mencionados, donde se puede observar el modo de funcionamiento y las salidas obtenidas.

Tal como se ha indicado, las actividades seleccionadas para el primer encuentro permiten rever el concepto de divisibilidad y el de divisores de un número natural, y de acuerdo con la estrategia que se plantee para cada resolución pueden recordarse los criterios o reglas de divisibilidad.

El primero de los problemas permite analizar la manera en que se pueden combinar estos divisores para dar solución a la situación planteada. La variedad que se presenta respecto de los números propuestos permite comenzar a elaborar conjeturas y conclusiones respecto de la cantidad de divisores que tienen los números cuadrados, lo cual es una propiedad de éstos, y que se relaciona con el segundo problema.

El problema 3 presenta, entre sus diferentes modos de resolución, la posibilidad de relacionar el concepto de divisores de un número natural con su descomposición polinómica en potencias de base 10, concepto que también se relaciona con la descomposición en unidades, decenas, centenas, etc.

El cuarto problema requiere en su resolución que se puedan relacionar varios de los conceptos con que los alumnos cuentan: múltiplos y divisores de un número natural, operaciones entre números naturales y estrategias de resolución de problemas.

En el segundo encuentro, se hace mayor hincapié en el concepto de números primos y compuestos, lo que trae como consecuencia la descomposición de un número en sus factores primos, además de los conceptos ya indicados para el encuentro anterior.

El problema 5 permite rever la definición de número primo y elaborar conjeturas sobre los números que podrían o no ser primos, justificando esta distinción.

El problema 6 permite profundizar acerca de las estrategias de resolución de problemas, además de comenzar a elaborar un listado de números primos, el cual puede ser utilizado en cualquiera de los próximos problemas a resolver.

La siguiente actividad introduce la definición de números perfectos y la propiedad de Euclides, que no eran conocidas hasta ahora por los alumnos.

El lenguaje algebraico introducido en el problema 8 se relaciona con una de las actividades del encuentro anterior, profundizando la interrelación entre el lenguaje simbólico y el numérico, donde se requiere el reconocimiento de algunos números primos con ciertas características y estrategias de resolución de problemas.

En el tercer encuentro, siguiendo la línea de un tratamiento espiralado, todo lo visto anteriormente se sigue profundizando a través de nuevas actividades.

En el problema 9 se introduce una nueva definición, que es la de números primos gemelos. En su resolución, además de volver sobre el listado de números primos, se hace hincapié en otros de los conceptos introducidos en una actividad anterior, como es el hecho de analizar, conjeturar y fundamentar sobre los criterios para seleccionar los posibles números primos.

A partir del problema 11, las actividades presentadas se centran en la descomposición de un número en sus factores primos, permitiendo elaborar y fundamentar conjeturas acerca de esta factorización y la cantidad de divisores de un número natural. Así, se puede establecer, por ejemplo, qué número puede tener una cantidad en particular de divisores, qué número puede ser el que tiene mayor cantidad de divisores, qué sucede con los números cuadrados, etc.

8. OBSERVACIONES SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN

En la clase anterior al primer encuentro se les solicitó a los alumnos que trajeran sus teléfonos celulares y cables de conexión USB para transferir los programas e instalarlos, lo que al principio pareció lento, pero luego se agilizó por la transferencia a través de Bluetooth y los adaptadores de tarjetas micro SD a USB sin necesidad de cable.

Luego se pasó a la ejecución de los programas DIVISORES, FACTOREO y PRIMOS, en cada celular, observando las posibilidades que brinda cada uno de ellos, despejando las dudas sobre sus aplicaciones y realizando algunos ejemplos de su utilización.

Se organizó la clase en grupos de tres o cuatro integrantes cada uno, y se les propuso para el primer encuentro la resolución de las actividades 1 a 4. Luego de un tiempo de análisis en los grupos, se observa que en el primer ítem del ejercicio 1 comenzaron probando las posibilidades de combinación sin necesidad de recurrir al celular, hasta que observaron que tanto la base como la altura de los rectángulos eran divisores de la cantidad total de baldosas; recién en este punto comenzaron a utilizar el programa DIVISORES, instalado con anterioridad, desarrollando sin dificultad los siguientes ítems de ese primer ejercicio.

Algunos de los resultados obtenidos, tanto en esta actividad como en algunas de las siguientes, pueden observarse en el Anexo 4.

En el ítem e) del ejercicio 1, en donde se pide que extraigan una conclusión de lo anterior, los alumnos observaron que la cantidad de rectángulos posibles era la mitad de la cantidad de divisores del número total de baldosas, excepto en el caso del 49, por lo que se trató de analizar qué particularidad tenía ese número respecto del 72, 48 y 47. Pronto arribaron a la conclusión de que tenía, a diferencia de los otros, una cantidad impar de divisores, lo que motivó la adecuación de la regla anterior, concluyendo que para este caso debía sumarse “uno” a la cantidad de divisores, antes de dividir por dos, o bien sumarle “un medio” a la mitad del número de divisores.

Por otro lado, el hecho de haberse encontrado un número con una cantidad impar de divisores permitió su vinculación con la pregunta planteada en la actividad 2.

Comenzaron a buscar, con el celular, la cantidad de divisores de los números menores que 100, lo cual se logró de manera rápida y sencilla, separando la tarea por grupos. Cabe destacar que esta actividad demandaría mucho tiempo sin la utilización de los programas cargados en los celulares. Luego de este proceso, los alumnos llegaron a la conclusión de que los números que tienen raíz cuadrada exacta, es decir, los cuadrados perfectos, tienen una cantidad impar de divisores, justificando a partir de lo anterior la relación que existe entre la cantidad de divisores y la disposición de las baldosas en el primer ejercicio.

Respecto de la actividad 3, debió explicárseles el significado de "la forma abcabc", advirtiendo que son números de seis cifras en los que la cifra de la unidad es igual a la de la unidad de mil, la cifra de la decena es igual a la de la decena de mil y la centena igual a la centena de mil. Tras esta aclaración, comenzaron a buscar, con el celular, los divisores de distintos números de esa forma, observando que en todos se repiten el 7, el 11 y el 13. También observaron que se repiten el 91 y el 143, pero los mismos son el producto de 7 y 13 y de 11 y 13, respectivamente, por lo que no se deberían tener en cuenta.

Algunos grupos analizaron, mediante el programa FACTOREO, que en la descomposición factorial de esos números aparecen siempre los factores 7, 11 y 13, por lo que se les sugiere que realicen el producto entre ellos, lo que da por resultado 1001, y al dividir "abcabc" por 1001, se obtiene como cociente "abc".

Ordenando las ideas que fueron surgiendo, los alumnos llegaron a la siguiente conclusión:

$$abcabc = 1001 \cdot abc$$

y factorizando el número 1001 se llega a:

$$abcabc = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot abc$$

Entonces, los números de la forma abcabc son siempre divisibles por 7, 11 y 13.

En el ejercicio 4 los alumnos calcularon los 12 primeros divisores de 216 con el programa DIVISORES y no tuvieron mayores dificultades en la ubicación de los números en el cuadrado mágico multiplicativo.

No todos los cursos pudieron resolver en este primer encuentro las cuatro actividades planificadas, quedando como tarea el último de los problemas. Se dio prioridad a las estrategias utilizadas, a los razonamientos, a las discusiones planteadas y a la fundamentación de las conclusiones obtenidas, sin una limitación concreta en cuanto al tiempo, prevaleciendo el enriquecimiento de los resultados obtenidos por sobre la cantidad de actividades a realizar.

En general, se pudo observar que resulta poco habitual la resolución de este tipo de problemas, lo cual acarrea mayor tiempo de dedicación a cada actividad y la enfatización tanto de las estrategias utilizadas como de los diferentes aspectos desde los cuales se puede abordar un mismo contenido.

En el segundo encuentro se trabajó con los conceptos de números primos y números perfectos, proponiendo la resolución de los ejercicios 5 al 8 que se incluyen en el Anexo 2.

Se recordó el concepto de número primo y los alumnos anotaron en un cuadro todos los números de la primera centena a modo de la Criba de Eratóstenes, en el que fueron tachando los números compuestos.

En relación con la actividad 5, observaron que el único primo par es el 2, ya que los demás números pares son múltiplos de él y por tanto compuestos, tachando en el cuadro las columnas de los pares. También eliminaron la columna de los terminados en 5, por ser éstos múltiplos de él, por lo que el criterio de búsqueda quedó limitado a los números impares terminados en 1, 3, 7 o 9. Algunos alumnos aplicaron el criterio de la divisibilidad por 3 y redujeron aún más la lista de posibles números primos. Luego, ayudados por los celulares con el programa PRIMOS, determinaron todos los primos menores que 100.

Pudieron concluir que:

- Todos los primos son impares, excepto el 2.
- Todos los pares son compuestos, excepto el 2.
- Al estar intercalados los pares y los impares es imposible hallar primos consecutivos, excepto 2 y 3.

Con respecto a la actividad 6, no se presentaron dificultades en encontrar las parejas propuestas.

En el ítem a) del ejercicio 7, a partir de la definición de número perfecto, con los celulares en el programa DIVISORES, comenzaron a buscar el único número perfecto de 2 cifras, separándose la tarea en grupos, encontrando sin dificultad al número 28.

En el ítem b) se presenta la fórmula de Euclides para hallar números perfectos:

"Si n es natural y $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto".

Presentaron dificultad los alumnos en entender la condición que planteaba el antecedente de esa implicación, ya que era necesario que $2^n - 1$ sea primo para que se cumpliera el consecuente y el número resultara perfecto, ya que habían intentado por ejemplo con $n = 1$ y obtuvieron 1, que no es primo. De manera similar a lo indicado respecto del tipo de actividades a las que los alumnos están acostumbrados a resolver, también en este caso se plantea la dificultad en el trabajo con implicaciones lógicas, que no siempre son conceptos que se analicen en profundidad.

Luego reemplazaron a n en la expresión anterior por 2, 3, 5 y 7, hallando con éxito los números perfectos 6, 28, 496 y 8128, únicos de 1, 2, 3 y 4 cifras, respectivamente. Con los demás números no se obtuvieron resultados favorables. El reemplazo siguiente, cuando $n = 13$, generó un número perfecto de 8 cifras.

Comprobaron, a continuación, que los números 496 y 8128 eran perfectos a través de la suma de sus divisores menores que ellos, que buscaron con sus celulares con el programa DIVISORES.

Con respecto a la actividad 8, analizaron que los dígitos A, B, C y D podían ser reemplazados solamente por las cifras 1, 3, 7 y 9 de acuerdo con lo analizado en el punto 5. Comenzaron con el número AA, determinando que solo podía ser el 11, ya que los otros números que tienen repetida la cifra de la unidad y la decena son múltiplos de 11, por lo que A = 1. Luego intentaron con AAAC, probando con 1113, 1117 y 1119, encontrando que el único primo es 1117, por lo que C = 7. Entonces BAB podía ser 313 o 919, ya que ambos son primos. La situación se define con BACD que puede ser 3179 o 9173; como el primero es compuesto y el segundo primo, pudieron concluir que B = 9 y D = 3.

En el tercer encuentro los alumnos, para resolver el ejercicio 9, buscaron con sus celulares, utilizando el programa PRIMOS, todos los números primos entre 100 y 200 y de ellos analizaron aquellos que eran primos gemelos, encontrando 101-103, 107-109, 137-139, 149-151, 179-181, 191-193 y 197-199. Con respecto a los criterios de búsqueda, ya habían señalado que los primos debían terminar en 1, 3, 7 ó 9, y aplicando algún criterio de divisibilidad, v.gr. el de tres, la selección se hizo más rápida.

Analizaron luego lo que plantea el ítem c) respecto de que los primos son anteriores o siguientes a un múltiplo de 6, probando en primer lugar con los gemelos, ya que al diferir en dos unidades, era sencillo comprobar si el número intermedio era divisible por seis. Luego probaron con los otros primos de la segunda centena, debiendo verificar si el anterior o el posterior al número primo era múltiplo de 6, y concluyeron que la respuesta era afirmativa. No sucedió así con la pregunta d), donde decidieron que no era condición suficiente para que un número sea primo el hecho de ser el anterior o el posterior a un múltiplo de 6, justificándolo con un contraejemplo. Encontraron que 119 y 121 son compuestos, a pesar de ser el anterior y siguiente, respectivamente, de 120, que es múltiplo de 6. Siguiendo esta línea, buscaron todos los múltiplos de 6 entre 100 y 200 y analizaron los anteriores y posteriores, comparándolos con los números obtenidos en a) y encontrando otros contraejemplos (144 y 186). Igual que lo sucedido en la resolución de otras actividades, la utilización de los programas cargados en los celulares y el trabajo en grupos facilitó considerablemente la tarea de búsqueda, de verificación y de conclusión.

Con respecto a la justificación propuesta en el ítem e), no resultó sencillo formalizar la idea anterior, ya que la simbolización de los múltiplos en forma algebraica y las propiedades de la divisibilidad eran temas que no habían sido tratados a ese nivel de análisis, presentando dificultad en comprender que dado un número que es múltiplo de 6 ($6n$), del siguiente ($6n + 1$) que es impar, nada puede asegurarse respecto de su primalidad. Sin embargo, $6n + 2$ es múltiplo de 2, $6n + 3$ múltiplo de 3, $6n + 4$ múltiplo de 2 aunque no siempre de 4. Mientras que de $6n + 5$, también expresable como $6 (n + 1) – 1$, que es el anterior a un múltiplo de 6, tampoco puede afirmarse que sea primo o compuesto, limitando así las posibilidades de encontrar un número primo solo para el caso de $6n + 1$ y $6n – 1$.

Con respecto a los gemelos comprendidos entre 1500 y 1600 que plantea la parte f) del ejercicio, algunos alumnos los buscaron con el celular, pero la mayoría de ellos lo hizo a partir de todos los múltiplos de 6 comprendidos en esa centena, comenzando con el 1500 (que es 6 • 250) hasta el 1596 (que es 6 • 266), analizando los anteriores y posteriores a ellos. Por ambos métodos de búsqueda concluyeron que no hay primos gemelos entre 1500 y 1600.

Trabajaron luego con el ejercicio 11, probando sin mayor criterio algunas combinaciones para obtener el número pedido, pero luego observaron que esos números debían ser divisores de él. Hallaron entonces con el programa DIVISORES todos los de 2 cifras y comenzaron a combinarlos. Otros trabajaron directamente con la factorización del número, llegando al resultado de modo más rápido.

En el ejercicio 12, buscaron los divisores de 32 y de 81 y la factorización de los mismos. Encontraron que la cantidad de divisores era uno más que el exponente de la factorización. Pero en ambos casos, en la descomposición interviene un único factor primo. Al analizar la relación anterior en el caso del número 72 y en el de 60, en cuyas factorizaciones intervienen más de un número primo, la situación devino más compleja. Se les sugirió que analizaran la composición de cada divisor de 32, 81, 72 y 60 para poder extraer alguna conclusión. Solo un grupo logró expresar que si se suma 1 a cada exponente de los factores primos de la descomposición de 72, y a estos resultados se los multiplica entre sí, se obtiene la cantidad total de divisores del número.

Utilizando la propiedad anterior no tuvieron dificultad en hallar los números con 13 divisores, ya que plantearon que un ejemplo es 2^{12} porque el exponente es uno menos que la cantidad buscada, lo que comprobaron con sus celulares. Afirmaron que sucedía lo mismo con 3^{12} y con 5^{12} aunque no con 4^{12}. Pudieron concluir que la propiedad solo se cumple si la base es un número primo.

En el ejercicio 14 encontraron algunos números con 12 divisores pero no justificaron el motivo de la elección.

En la actividad 15, algunos plantearon que si un número era par, no tenía divisores primos impares, lo cual fue refutado con un contraejemplo, el 12, que tiene como divisor al 3. Luego de esto analizaron que en la descomposición factorial del número solo puede presentarse el 2, siendo entonces las potencias de 2 los números que cumplen con la condición pedida.

9. CONCLUSIONES

Durante esta implementación y a lo largo de los tres encuentros se pudieron verificar algunas de las ventajas que se habían previsto sobre el trabajo con los programas cargados en los celulares:

- la secuencia de actividades diseñadas constituye un ejemplo de que los celulares pueden resultar otro recurso didáctico para el desarrollo de contenidos en el aula, como es el caso de un contenido matemático;
- resulta de gran comodidad la posibilidad de incorporar un recurso tecnológico en el salón habitual donde se encuentran los alumnos, permitiendo además que cada uno de ellos trabaje de manera individual o independiente en el proceso de resolución de problemas, y al mismo tiempo, de manera grupal, compartiendo sus ideas y conjeturas, y debatiendo, discutiendo y fundamentando sus respuestas frente a la de sus compañeros; se promueve la búsqueda de procedimientos y la argumentación verbal y escrita; todo esto lleva al alumno a la construcción del conocimiento de una manera fundamentada;
- este recurso permite un campo de experimentación que no estaría al alcance de los alumnos si no contaran con esta herramienta, constituyendo un instrumento amplificador o reorganizador, en términos de Moreno Armella; la ventaja de contar con este tipo de recursos permite que cada alumno pueda experimentar una cantidad innumerable de situaciones en muy poco tiempo, y el trabajo grupal permite que, en conjunto, puedan relacionar este gran número de casos y elaborar conjeturas individuales y grupales;
- si bien, en principio, el tiempo que lleva la carga de estos programas en cada uno de los celulares puede verse como un obstáculo para su implementación, la serie de ventajas enunciadas precedentemente cubren con creces ese esfuerzo.

Todo lo desarrollado respecto de las teorías que nos sirven como marco de referencia y las actividades implementadas utilizando los celulares como recurso didáctico en el aula enfatizan el rol que los docentes debemos asumir en cuanto a la selección de actividades y la posible incorporación de diferentes recursos para el desarrollo de contenidos matemáticos.

10. ANEXO 1

52 | CLARIN | SOCIEDAD | DOMINGO 14 DE MARZO DE 2010

EN LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

Flexibilizan los controles en las escuelas por el uso de los celulares

• Dicen que ya es un útil más para los chicos. No se registran sanciones recientes.

LA PLATA. CORRESPONSALIA
Fabián Debesa
laplata@clarin.com

En poco tiempo, los celulares se transformaron en un objeto clave de la estética adolescente. Sin embargo, en las escuelas bonaerenses el uso de los "telefonitos" está prohibido a alumnos, docentes y directivos desde hace cuatro años.

La limitación incluye todas las aplicaciones: está prohibido enviar mensajes, sacar fotos o escuchar música con el aparato. En 2006, cuando las autoridades de la Dirección de Escuelas tomaron la decisión, la explosión del consumo de telefonía móvil **se extendía en el mercado juvenil e interfería en el dictado de clases.**

Desde entonces, los directivos comenzaron a imponer **sanciones y establecieron reglas en los códigos de convivencia.** Ahora, según coincidieron autoridades consultadas por **Clarín**, los controles se flexibilizaron: "No tenemos registro reciente de sanciones a estudiantes secundarios por mal uso de celulares", admitió la directora de Enseñanza Media, Claudia Bracchi.

La cifra

40%

De los argentinos de entre 10 y 24 años prefiere el celular sobre la televisión y la computadora, según TNS Gallup.

En el ex Normal N° 2 de La Plata, el reglamento establece una "advertencia" para los alumnos que –por primera vez– lo usen en el aula. Si reinciden, vienen las amonestaciones. "Se trabaja desde el comienzo con padres y jóvenes. En las reuniones iniciales se reiteran estas normas y se informan por cuaderno de comunicaciones", explicó a **Clarín** el director de la escuela, Emilio González. **"Hoy el celular es como un útil más para los chicos. Todos lo tienen, por eso intentamos educarlos en el uso responsable"**, aclaró.

Algunos profesores incorporaron el celular como herramienta educativa. En la escuela media N° 3 de General Alvear, en el interior de la provincia, los chicos del último año hicieron un video con recomendaciones para evitar el contagio de la Gripe A. En agosto de 2009, lo enviaron por SMS a todos los compañeros.

En el Colegio Nacional de la UNLP, la disposición provincial no tiene vigencia. "Tenemos que acostumbrar a los adolescentes a usarlo dentro y fuera de la institución. Ellos necesitan el celular para desempeñarse en la sociedad. Hay un contrato educativo que fija normas de uso", dijo el director Gustavo Oliva.

Escuelas recomienda a los docentes apagarlo al inicio de la clase. "Es un gesto que ayuda", explicó Bracchia. Los alumnos, resignados. "No lo usamos en el cine o cuando jugamos al fútbol. Esto es lo mismo", confesó Gustavo Santos, de la media 16 de La Plata.

GUSTAVO CASTAING

EN CLASE, PERO APAGADO. BUSCAN QUE HAYA UN USO RESPONSABLE.

11. ANEXO 2

PROBLEMAS DE DIVISIBILIDAD

1) a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden disponer 72 baldosas cuadradas de manera que formen una superficie rectangular?
   b) ¿Y si fueran 48 baldosas?
   c) ¿Qué ocurre si tienes 49 baldosas?
   d) ¿Y si tienes 47 baldosas?
   e) ¿Qué conclusiones puedes obtener que te permitan conocer la cantidad de maneras diferentes de lograr superficies rectangulares según la cantidad de baldosas?

2) ¿Cuáles son los números naturales que tienen una cantidad impar de divisores?

3) ¿Por qué los números de la forma "abcabc" son divisibles por 13? ¿Qué otros números siempre lo dividen? ¿Por qué?

4) Si se eliminan 3 de los doce primeros divisores de 216, se puede conseguir con los otros nueve, sin repetir ninguno el siguiente cuadro mágico multiplicativo, de manera que el producto de los tres números que ocupan cualquiera de las filas, columnas o diagonales, es siempre 216.

	6	
	36	

5) El único par de números consecutivos primos es 2 y 3. ¿Por qué?

6) Empareja los seis primeros números primos de manera que la suma de los números de una de las parejas sea múltiplo de 3 y 5; la otra múltiplo de 2 y 7, y la tercera múltiplo de 2 y 3.

7) Un número es perfecto cuando es igual a la suma de los divisores menores que él. Por ejemplo, los divisores de 6 son: 1, 2, 3 y 6. Sus divisores menores que él son: 1, 2, y 3 y si los sumamos el resultado es 6, entonces el 6 es perfecto.

a) Existe un solo número perfecto de dos cifras. ¡Encuéntralo!
b) En "Elementos" de Euclides se encuentra la siguiente afirmación: "si n es un número natural y $2^n - 1$ es primo, entonces el número $2^n - 1 \cdot (2^n - 1)$ es perfecto".
Utiliza esta fórmula para hallar los únicos números perfectos de tres y cuatro cifras. Comprueba que son números perfectos a través de la suma de sus divisores.

8) Se trata de encontrar cuatro números primos que sean de la forma: AA, BAB, BACD y AAAC, teniendo en cuenta que las letras A, B, C y D representan siempre los mismos dígitos.

9) Los números primos gemelos son aquellos que son primos y difieren solo en dos unidades. Por ejemplo: 11 y 13.
a) Indicar primos gemelos de tres cifras, menores que 200.
b) ¿Qué criterios utilizaste para elegir los posibles números primos?
c) ¿Es cierto que todos los números primos que hallaste resultan el anterior o siguiente de un múltiplo de seis? ¿Por qué?

d) ¿Es cierto que todo número anterior o siguiente de un múltiplo de seis es primo? ¿Por qué?
e) Justifica por qué un número que no es el anterior o siguiente a un múltiplo de seis no puede ser primo.
f) A partir de las conclusiones obtenidas, encuentra todos los primos gemelos entre 1500 y 1600.

10) ¿Es siempre posible convertir un entero en primo, modificando una sola de sus cifras?

11) Escribir a 1238544 como producto de números naturales de dos cifras.

12) a) Encuentra todos los divisores de 32.
b) Descompone 32 en sus factores primos.
c) Procede de la misma manera con 81.
d) Encuentra una relación entre la cantidad de divisores y el exponente obtenido en la descomposición.
e) Verifica la relación obtenida con los números: 72 y 60.
f) Generaliza esa relación para cualquier descomposición en factores primos.

13) ¿Hay algún número que tenga 13 divisores?

14) De todos los números menores que 100, ¿cuáles tienen mayor cantidad de divisores?

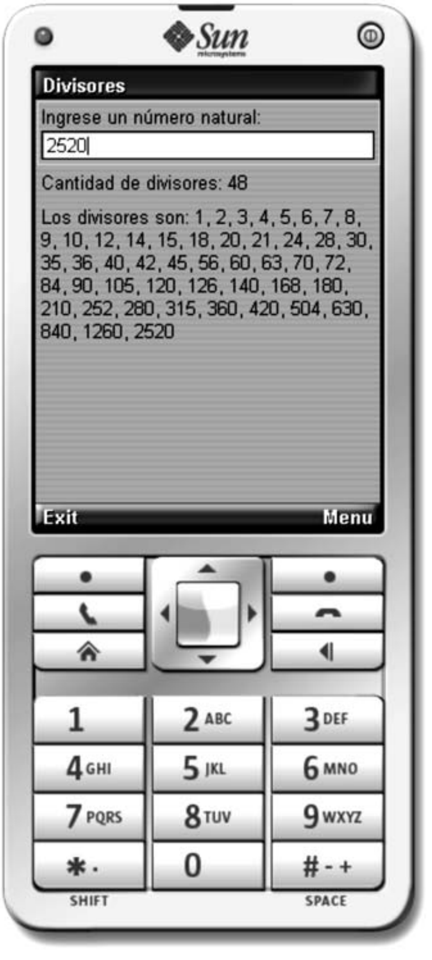
15) ¿Qué números naturales no son divisibles por ningún primo impar?

16) Se pueden construir tiras de números consecutivos compuestos tan largas como se quiera. Por ejemplo: 24, 25, 26 y 27 es una tira de 4 números consecutivos compuestos. Si consideramos al 28, tendremos una tira de 5 números consecutivos compuestos.
a) Indica una sucesión de 10 números consecutivos compuestos.
b) Obtiene una sucesión de 20 números consecutivos compuestos. Explica qué estrategia utilizaste para encontrarlos.

17) ¿Puedes encontrar entre dos números primos consecutivos, una lista de exactamente seis números compuestos consecutivos?

12. ANEXO 3

DIVISORES
Programa que al ingresar un número natural indica la cantidad de divisores que tiene y los enumera.



FACTORIZACIÓN

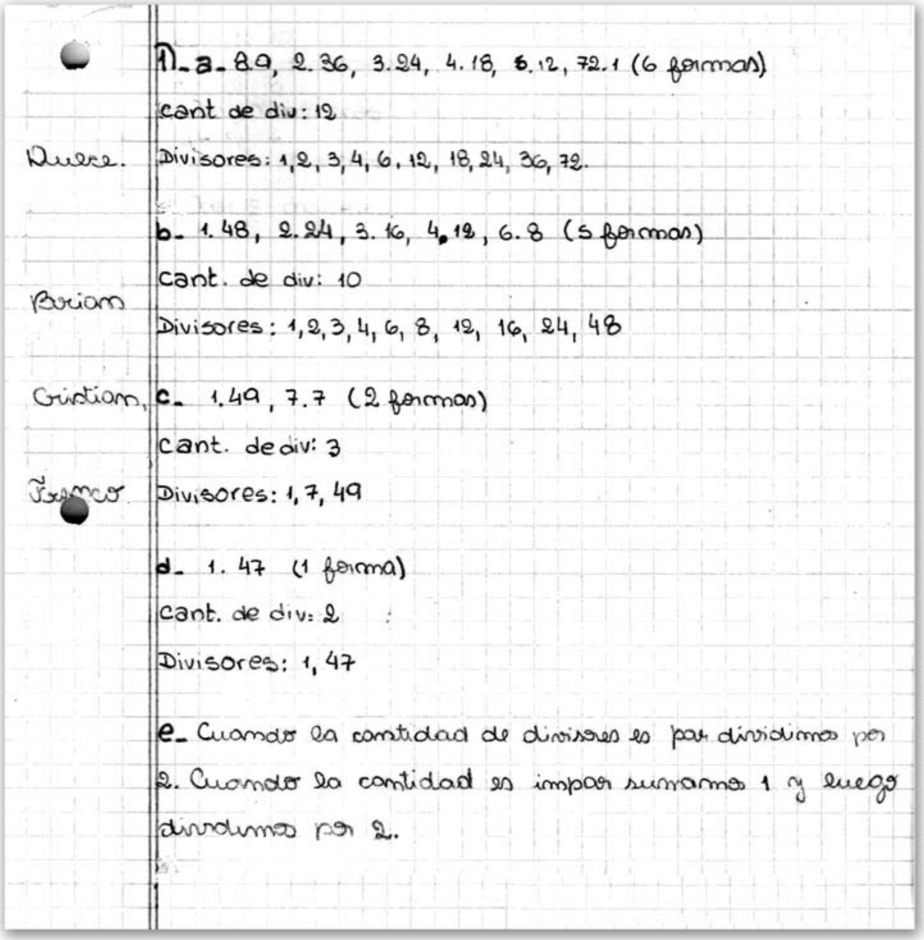
Programa que al ingresar un número natural, indica su descomposición en factores primos.

PRIMOS
Programa que al ingresar un número natural, indica si es primo o no.

13. ANEXO 4

Primer encuentro

Actividad 1



1)_ a_ 8.9, 2.36, 3.24, 4.18, 6.12, 72.1 (6 formas)
cant de div: 12
Duece. Divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 24, 36, 72.

b_ 1.48, 2.24, 3.16, 4.12, 6.8 (5 formas)
cant. de div: 10
Brian Divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Cristian, c_ 1.49, 7.7 (2 formas)
cant. de div: 3
Franco. Divisores: 1, 7, 49

d_ 1. 47 (1 forma)
cant. de div: 2
Divisores: 1, 47

e_ Cuando la cantidad de divisores es par dividimos por 2. Cuando la cantidad es impar sumamos 1 y luego dividimos por 2.

1)a. Para 72 bolsas hay 6 diferentes formas de acomodarlos:

- 72.1
- 36.2
- 24.3
- 18.4
- 9.8
- 6.12

La relación que hay es que 72 tiene 12 divisores, al agruparlos de a 2 dan como resultado las 6 variantes.

b. Si fueran 48, hay 5 formas diferentes, ya que son 10 los divisores

- 8.6
- 48.1
- 12.4
- 24.2
- 3.26

c. Si fueran 49, a pesar de que son 3 los divisores pueden formarse 2 variantes:

.7.7

.41.1

.Los divisores son:

1, 7, 49.

y al "7" (el que queda) se lo multiplica por si mismo

agrupamos el 1° con el ultimo.

.Esto sucede cuando un número es impar.

* Cuando la cantidad de divisores es impar se le suma "1" y se lo divide por "2".

$$\boxed{\frac{x+1}{2}}$$

Actividad 2

2) Los números que tienen cantidades impar de divisores son: los que resultan de un número al cuadrado. Ejemplo.

1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . 81 . 100 . 121 . 144 . 169 . 196

1 - 4 - 9 - 16 - 25 ...

1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 ...

Actividad 3

3)_ Los números de la forma "abcabc" son divisibles por 13 porque dicho número es uno de sus divisores. Otros números que siempre lo dividen son el 7, el 11 y el 1001 porque al multiplicar 7. 11. 13 obtenemos como resultado 1001; entonces multiplicamos 1001 por "abc" y obtenemos como resultado el número de forma "abcabc".

3) abcabc

$123123 \Rightarrow 3 . 7 . 11 . 13 . 41$

$230230 \Rightarrow 2 . 5 . 7 . 11 . 13 . 23$

$786786 \Rightarrow 2 . 5 . 7 . 11 . 13 . 151$

$520520 \Rightarrow 2^3 . 5 . 7 . 11 . 13^2$

$613613 \Rightarrow 7 . 11 . 13 . 613$

$101101 \Rightarrow 7 . 11 . 13 . 101$

$311311 \Rightarrow 7 . 11 . 13 . 311$

Los números "7.11.13" dividen a todos los números.

Multiplicados dan "1001"

El "1001" siempre divide a los números.

$$\boxed{\begin{array}{r} abc \\ \times 1001 \\ \hline abc \\ +\ abc00 \\ \hline abcabc \end{array}}$$

Segundo encuentro

Actividad 6

(6) $13 + 2 = 15$ Múltiplo de 3 y 5

$11 + 3 = 14$ Múltiplo de 2 y 7

$7 + 5 = 12$ Múltiplo de 2 y 3.

Actividad 7

(7) (a) $D_{14} = 1, 2, 7, 14$

$D_{12} = 1, 2, 3, 4, 6, 12$

$D_{15} = 1, 3, 5, 15$

$D_{16} = 1, 2, 4, 8, 16$

$D_{17} = 1, 17$

$D_{18} = 1, 2, 3, 6, 9, 18$

$D_{19} = 1, 19$

$D_{20} = 1, 2, 4, 5, 10, 20$

$D_{21} = 1, 3, 7, 21$

$D_{22} = 1, 2, 11, 22$

$D \boxed{28 = 1, 2, 4, 7, 14, 28}$

(b) Si N es natural y $2^n - 1$ es primo entonces $\boxed{2^{N-1} \cdot (2^N - 1)}$ es perfecto

Para $N = 2$

$2^2 - 1 = 3$ es primo $\Rightarrow 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1) = 6$ es perfecto

Para N° 5 =

$2^{5}-1 = 31 \Rightarrow$ es primo

$2^{5-1} \cdot (2^{5}-1) = \boxed{496} \Rightarrow$ perfecto

$16 \cdot 31$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = \boxed{496}$

Para N = 7

$2^{7}-1 = 127 \Rightarrow$ es primo

$2^{7-1} \cdot (2^{7}-1) \Rightarrow \boxed{8128} \Rightarrow$ Perfecto

$64 \cdot 127$

$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128$

Para N = 3

$2^{3}-1 = 7 \Rightarrow$ es primo

$2^{3-1} \cdot (2^{3}-1) = 28 \Rightarrow$ perfecto

$4 \cdot 7$

Para N = 11

$2^{11}-1 = 2047 \Rightarrow$ compuesto

Para N = 13

$2^{13}-1 = 8191 \Rightarrow$ Primo

$2^{13-1} \cdot (2^{13}-1) \Rightarrow 33550336 \Rightarrow$ es muy grande

$4096 \cdot 8191$

Actividad 8

(8) Nº primo = 11 AA

313 - $\boxed{919}$ BA B

3179 - $\boxed{9173}$ BACD ✓

1113 - $\boxed{1117}$ - 1119 AAAC

Tercer encuentro

Actividad 9

9).

A). LOS NÚMEROS PRIMOS DE TRES CIFRAS MENO DE 200 SON:

101 - 103 137 - 139 179 - 181

107 - 109 149 - 151 191 - 193

197 - 199.

B). LOS NÚMEROS PRIMOS GEMELOS SON LOS NÚMEROS QUE ESTAN A LA IZQUIERDA Y OTROS A LA DERECHA DE UN NÚMERO PAR Y SON PRIMOS GEMELOS PORQUE LOS NÚMEROS PARES SON MULTIPLO DE "6".

a. SI ES CIERTO QUE LOS NÚMEROS PRIMOS RESULTAN DEL ANTERIOR Y SIGUIENTE PORQUE SON MULTIPLO DE "6".

Ejemplos:

17.6

101 102 103

SI YO TENGO DOS NÚMEROS PRIMOS GEMELOS PUEDO TENER UN MULTIPLO DE "6".

- LOS NÚMEROS PRIMOS QUE HAY ENTRE 1.500 Y 1.600 SON:

1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553,

1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597.

NINGUNO DE ESTOS NÚMEROS SON PRIMOS GEMELOS PORQUE NO TIENEN NINGÚN NÚMERO DE ELLOS NO PODRA SER MULTIPLO

(8) DE "6" Y NO CUMPLIR CON LA FUNCIÓN DE PRIMOS GEMELOS.

(9) NROS primos gemelos:

- 101 – 103
- 107 – 109
- 137 – 139
- 191 – 193
- 197 – 199
- 179 – 181
- 149 – 151

(b) tiene que terminar en 1, 3, 7 o 9 pero esto no te asegura que todos sean primos.

(c) los números primos que no son gemelos son:

113 – 127 – 131 – 157 – 163 – 167 – 173.

113 — 114 → 6.19

6.21 ← 126 — 127

131 – 132 → 22.6

6.26 ← 156 — 157

6.27 ← 162 — 163

$\boxed{167} - 168 \rightarrow 6.28$

$\boxed{173} - 174 \rightarrow 6.29$

d) $6.17 \rightarrow 102$

$6.18 \rightarrow 108$

$6.19 \rightarrow 114$

$6.20 \rightarrow 120 \rightarrow 119 \ \boxed{120} \ 121$

$6.21 \rightarrow 126$

$6.22 \rightarrow 132$

$6.23 \rightarrow 138$

$6.24 \rightarrow 144 \rightarrow 143 \ \boxed{144} \ 145$

$6.25 \rightarrow 150$

$6.26 \rightarrow 156$

$6.27 \rightarrow 162$

$6.28 \rightarrow 168$

$6.29 \rightarrow 174$

$6.30 \rightarrow 180$

$6.31 \rightarrow 186 \rightarrow 185 \ \boxed{186} \ 187$

$6.32 \rightarrow 192$

$6.33 \rightarrow 198$

No, no se cumple porque hay algunos excepciones que no respetan el siguiente o el anterior de un número como por ej: **186**

250 . 6 = 1500	1499 → Primo
251 . 6 = 1506 →	1505 - $\boxed{1506}$ - 1507 (Comp.)
252 . 6 = 1512	1511 → Primo
253 . 6 = 1518 →	1517 - $\boxed{1518}$ - 1519
254 . 6 = 1524	1523 → Primo
255 . 6 = 1530	1531 → Primo
256 . 6 = 1536 →	1535 - $\boxed{1536}$ - 1537 (c)
257 . 6 = 1542	1543 → Primo
258 . 6 = 1548	1549 → Primo
259 . 6 = 1554	1553 → Primo
260 . 6 = 1560	1559 → Primo
261 . 6 = 1566	1567 → Primo
262 . 6 = 1572	1571 → primo
263 . 6 = 1578	1579 → primo
264 . 6 = 1584	1583 → primo
265 . 6 = 1590 →	1589 - $\boxed{1590}$ - 1591 (Comp)
266 . 6 = 1596	1597 → primo

No hay ningún número primo gemelo entre 1500 - 1600

14. BIBLIOGRAFÍA

Aguilera Jiménez, A. (2000): *Los nuevos retos educativos ante la sociedad de la información*. Universidad de Sevilla.

Alcaino, R. (2009): "No más mochilas pesadas: los contenidos escolares van ahora en el celular", en:
http://fisica.usach.cl/~fisicaweb/index.php?option=com_content&view=article&id=178%3Aegresado-de-licenciatura-en-educacion-en-fisica-y-matematica-recibio-premio-latinoamericano&catid=1%3Alatest-news&Itemid=34

Brunet, J. (2009): "Celulares en la educación", en:
http://www.comunidaddeprofesores.com/2009/08/celulares-en-la-educacion/

Chattás, J. (2009): "¿El teléfono celular adentro o afuera del aula?", en http://portal.educ.ar/noticias/ciencia-y-tecnologia/el-telefono-celular-adentro-o.php

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2007). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria*. 1º año. Secretaría de Educación. La Plata.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2008). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria*. 2º año. Secretaría de Educación. La Plata.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2009). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria*. 3º año. Secretaría de Educación. La Plata.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2009). *Diseño Curricular para la Escuela Secundaria*. Ciclo Superior 4º año. Versión preliminar. Secretaría de Educación. La Plata.

Kingston, P. (2005): "M-learning: mejorar en lectura, ortografía y matemática jugando con el celular", en http://www.clarin.com/diario/2005/05/05/conexiones/t-970122.htm

Mansilla Chávez, R. (2009): "Enseñan a profesores a usar el celular y el video como herramientas educativas", en:
http://cliceduca.wordpress.com/2009/08/12/ensenan-a-profesores-a-usar-el-celular-y-el-video-como-herramientas-educativas/

Moreno Armella, L. y Waldegg, G. (2002): "Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas", en *Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. M.E.N. Colombia, Bogotá.

Moreno Armella, L. (2002): "Instrumentos matemáticos computacionales", en *Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. M.E.N. Colombia, Bogotá.

Noss, R. (1999): *Nuevas culturas, nuevas Numeracy*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2003): *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. OCDE. París.

Pozo, J. I. (1997): *La solución de problemas*. Santillana, Madrid.

Rodríguez, L.: "Los celulares también son una herramienta de aprendizaje", en http://www.diarioperfil.com.ar/edimp/0175/articulo.php?art=1002&ed=0175

Sáez, A. y Vargas, S. (2008): "Investigadores de C5 desarrollarán videojuego educativo en celulares para aprender ciencias", en
http://ing.uchile.cl/boletin/noticia.php?id=11846

San Martín Alonso, Á. (1995): "De la miseria del método a la grandeza de las tecnologías", en Sancho, J. y Millán, L. (Comp.): *Hoy ya es mañana. Tecnologías y educación: un diálogo necesario*. MCEP, Sevilla.

Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2002). *Actualización de programas de nivel medio. Programa de Matemática Primer año*. Dirección de Currícula. Buenos Aires.

Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2004). *Actualización de programas de nivel medio. Programa de Matemática Segundo año*. Dirección de Currícula. Buenos Aires.

Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2006). *Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Matemática*. Dirección de Currícula. Buenos Aires.

Tedesco, J. C. (1999): *Educación y sociedad del conocimiento y de la información*. Encuentro Internacional de Educación Media. Bogotá.

Viñas de la Hoz, M. y otros (2004): "La calculadora: Una fuente de exploraciones conceptuales", en. Revista Zona Próxima Nº 5, pp. 28-41. *Instituto de Estudios Superiores en Educación*. Universidad del Norte. Colombia.

http://www.derf.com.ar/despachos.asp?cod_des=260955&ID_Seccion=21

http://manzanamecanica.org/2009/11/celulares_para_apoyar_la_educacion.html

http://www.eduteka.org/DeclaracionCalculadoras.phphttp://www.clarin.com /diario/2010/03/14/sociedad/s-02158903.htm